

Correctif des travaux de vacances- série N°1 :

5UAA3 – Continuité, limites, asymptotes

1. Calculer le domaine.
2. Calculer les limites.
3. Donner la définition correspondante en ε
4. Donner les équations des asymptotes obtenues par le calcul de ces limites.
5. Schématiser dans le voisinage des asymptotes obtenues (pour vérifier vos courbes, utilisez Geogebra)

$$f(x) = \frac{15x^2 + x - 6}{-4x^2}$$

$$D = \mathbb{R}_0 \quad \lim = +\infty \quad \text{A.V.} \equiv x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

$$f(x) = \frac{\sin 8\pi/7}{\sqrt{x+3}}$$

$$D =]-3, +\infty[\quad \lim_{(x \rightarrow -3^+)} = -\infty \quad \text{A.V.} \equiv x = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, x > a \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

$$f(x) = \frac{5}{(1-x^2)^3}$$

$$D = \mathbb{R} / \{-1, 1\} \quad \lim = 0^- \quad \text{A.H.} \equiv y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b^- \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, x > \eta \Rightarrow -f(x) < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b^- \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, x < -\eta \Rightarrow -f(x) < \varepsilon$$

$$f(x) = -3x^5 + 5x^2 - 8$$

$$D = \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, x > \eta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, x < -\eta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

$$f(x) = \frac{x-4}{-x^2+x+12}$$

$$D = \mathbb{R} / \{4, -3\} \quad \lim = -1/7$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + 12} + 3x + 2}$$

$$D = \mathbb{R} / \{1/2, -2\} \quad \lim = -1/10$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{3x}$$

$$D = [0, +\infty[\quad \lim (x \rightarrow \pm\infty) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, x > \eta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, x < -\eta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

$$f(x) = \frac{(1-2x)^3}{4+x^2}$$

$$D = \mathbb{R} \quad \lim (x \rightarrow \pm\infty) = \pm\infty$$

Voir cas précédent

Recherche toutes les asymptotes de $f(x) = \frac{2x^3+5x-6}{x^2+1}$ en spécifiant la position du graphique par rapport aux asymptotes

$D = \mathbb{R}$ donc pas d'AV

degré du num = degré dén + 1 donc A.O.

$$\delta(x) = \frac{3x-6}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \delta(x) = 0^\pm$$

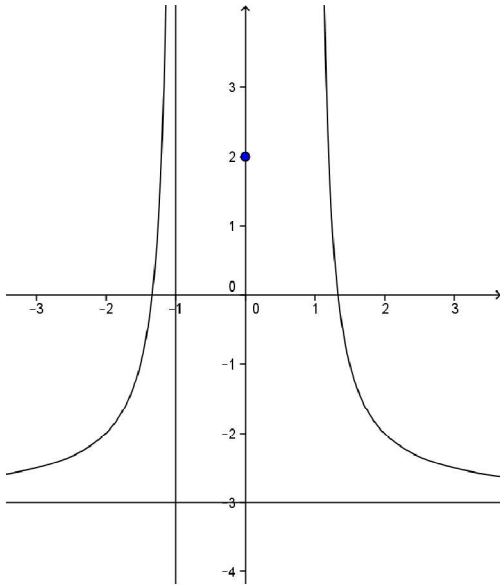
Invente une fonction qui répond aux propriétés suivantes :

2 A.V. dont l'une a pour équation $x = 5$; discontinu en $x = -5$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3$

$$f(x) = \frac{3x^2}{(x-5)(x+5)}$$

Trace un graphique qui répond aux propriétés suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3^+ , \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 ; \quad f(x) \text{ est pair}$$



5UAA4 - Dérivées

1) Calcule les dérivées :

$$\left((15x^3 - 25x + 1)^8 \right)'$$

$$\left(-4x^9 (3 - 7x)^6 \right)'$$

$$\left(\frac{(4x^2 - 1)^5}{(1 - 3x)^4} \right)'$$

$$(\sqrt{x^4 + 5x^2 + 5})'$$

$$\left(\frac{8}{7x^2} \right)'$$

$$(3tg^{25}x)'$$

$$\left(2 \cos^3(\pi - 4x^2) \right)'$$

$$\left(\frac{\sqrt{x^2 + 10}}{\sqrt{4x^2 + 1}} \right)' =$$

$$\left(\frac{\sqrt{5x^2 + 3x + 1}}{4x^2 + 1} \right)' =$$

$$\left(\sqrt{\frac{8x^2 + 2x + 3}{x^2 + 6}} \right)' =$$

Réponses :

$$45x^2 - 25$$

$$-36x^8 (3 - 7x)^6 - 4x^9 6 (3 - 7x)^5 (-7) = 12x^8 (3 - 7x)^5 (-9 + 35x)$$

$$\frac{5(4x^2 - 1)^5 (8x)(1 - 3x)^4 - (4x^2 - 1)^5 4(1 - 3x)^3 (-3)}{(1 - 3x)^4} =$$

$$\frac{4(4x^2 - 1)^4 (-18x^2 + 10x - 3)}{(1 - 3x)^5}$$

$$\frac{2x^2 + 5x}{\sqrt{x^4 + 5x^2 + 5}}$$

$$\frac{-16}{7x^3}$$

$$\frac{30 \operatorname{tg} 5x}{\cos^2 5x}$$

$$6 \cos(\pi - 4x^2) \sin(\pi - 4x^2) (-8x) = -48x \cos(\pi - 4x^2) \sin(\pi - 4x^2)$$

ou

$$-24 \sin(2\pi - 8x^2) = -24 \sin(-8x^2) = 24 \sin(8x^2)$$

$$\frac{\frac{2x\sqrt{4x^2+1}}{2\sqrt{x^2+10}} - \frac{8x\sqrt{x^2+10}}{2\sqrt{4x^2+1}}}{4x^2+1} = \frac{x(4x^2+1) - 4x(x^2+10)}{(4x^2+1)\sqrt{x^2+10}\sqrt{4x^2+1}} = \frac{-39x}{(4x^2+1)\sqrt{x^2+10}\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\frac{\frac{(10x+3)(4x^2+1)}{2\sqrt{5x^2+3x+1}} - 8x\sqrt{5x^2+3x+1}}{(4x^2+1)^2} = \frac{30x^3 + 12x^2 + 10x + 3 - 80x^3 - 48x^2 - 16x}{(4x^2+1)^2 2\sqrt{5x^2+3x+1}}$$

$$= \frac{-50x^3 - 36x^2 - 6x + 3}{(4x^2+1)^2 2\sqrt{5x^2+3x+1}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{8x^2+2x+3}{x^2+6}}} \cdot \frac{(16x+2)(x^2+6) - (8x^2+2x+3)(2x)}{(x^2+6)^2} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{8x^2+2x+3}{x^2+6}}} \cdot \frac{-2x^2 + 90x + 12}{(x^2+6)^2} =$$

Soit $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$

Les dérivées sont données par

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+2) + (x-1)^2}{3\sqrt[3]{(x-1)^4(x+2)^2}} = \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+2)\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$$

Le domaine de $f(x)$ = $\mathbb{R}$

La fonction n'est pas dérivable en $x = 1$ et en $x = -2$

Si on calcule la limite de $f'(x)$ pour x tendant vers $1\pm$, on obtient $\pm\infty$, ce qui montre que la tangente au graphique en $x = 1$ est parallèle à l'axe OY.

Le point $(1,0)$ est point de rebroussement

$t \equiv x = 1$

Si on calcule la limite de $f'(x)$ pour x tendant vers $2\pm$, on obtient $+\infty$ pour les deux cas, ce qui montre que la tangente au graphique en $x = 1$ est parallèle à l'axe OY mais le point $(-2,0)$ est appelé point à tangente verticale

$t \equiv x = -2$

